EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2004 **VERSÃO 1**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\qquad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\;, k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Indique o valor de p para o qual se verifica a igualdade $\log_p 16 = 4$

(A) -4 **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{2}$

2. Sabe-se que:

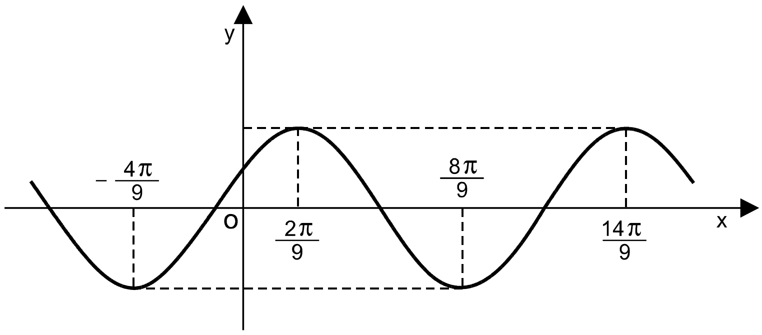
- o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, uma hora depois de ter tomado uma bebida alcoólica, é, numa certa unidade, igual ao quociente entre o peso do álcool ingerido (em gramas) e 70% do peso dessa pessoa (em quilogramas).
- num decilitro de um certo tipo de vinho existem 5 gramas de álcool.

Qual das expressões seguintes dá o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, em função do seu peso x (em quilogramas), uma hora depois de essa pessoa ter bebido dois decilitros desse vinho?

(A) $\dfrac{10}{70\,x}$ **(B)** $\dfrac{10}{0{,}7\,x}$

(C) $\dfrac{2}{70\,x}$ **(D)** $\dfrac{2}{0{,}7\,x}$

3. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.

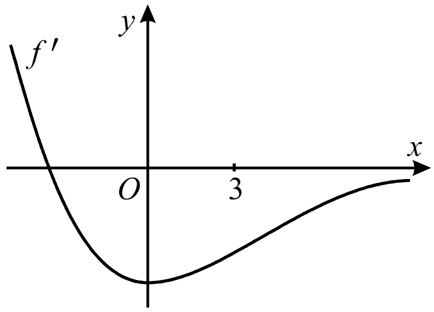


Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

(A) $\frac{\pi}{9}$ **(B)** $\frac{2\pi}{9}$ **(C)** $\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $\frac{4\pi}{3}$

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

Na figura junta encontra-se parte do gráfico de f', função derivada de f.



Sabe-se ainda que $f(0) = 2$

Qual pode ser o valor de $f(3)$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 5 **(D)** 7

5. De quantas maneiras distintas podem ficar sentados três rapazes e quatro raparigas num banco de sete lugares, sabendo que se sentam alternadamente por sexo, ou seja, cada rapaz fica sentado entre duas raparigas?

(A) 121 **(B)** 133 **(C)** 144 **(D)** 156

6. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

$$P(A) = 0{,}3 \qquad P(A \cap B) = 0{,}1 \qquad P(A \cup B) = 0{,}8$$

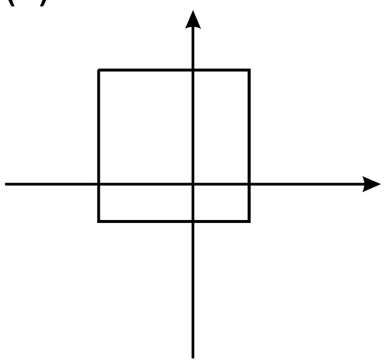
Qual é o valor de $P(\overline{B})$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}4$

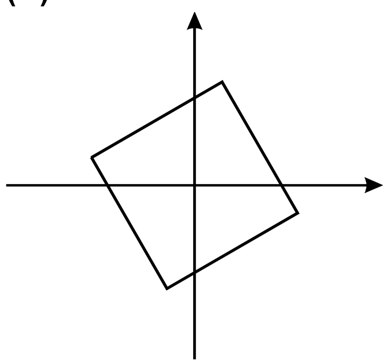
7. Os quatro vértices de um dos quadriláteros seguintes são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de um certo número complexo w.

Qual poderá ser esse quadrilátero?

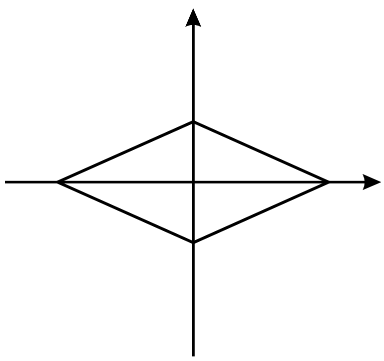
(A)



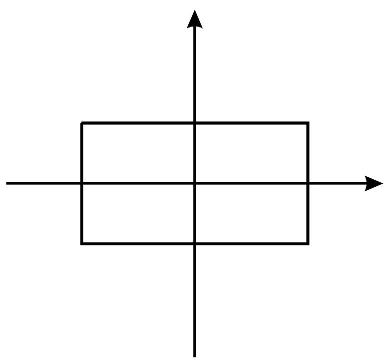
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$w = 4 - 3\,i$ (i designa a unidade imaginária)

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma algébrica, $2\,i + \dfrac{w^2}{i}$

1.2. Seja α um argumento do número complexo w.
Exprima, na forma trigonométrica, em função de α, o produto de i pelo conjugado de w.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

2.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1.1. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

2.1.2. Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

2.2. O conjunto solução da inequação $f(x) \leq 3 + \ln x$ é um intervalo fechado $[a, b]$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).
Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para a e b, arredondados às centésimas.
Nota: apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

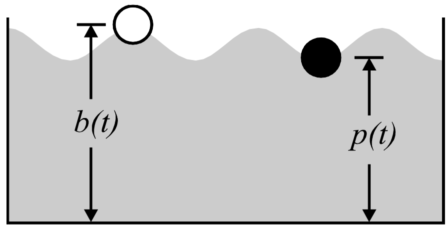
3. Duas bolas de plástico com o mesmo raio, uma branca e outra preta, flutuam na superfície de um líquido contido num recipiente.

Por acção de uma força exterior, o líquido perdeu o estado de repouso em que se encontrava, tendo a distância de cada uma das bolas à base do recipiente deixado de ser constante.

Designando por $b(t)$ e $p(t)$ as distâncias, em cm, dos centros das bolas (branca e preta, respectivamente) à base do recipiente, t segundos após o início da perturbação, admita que se tem:

$$b(t) = 10 + e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t)\,, \qquad t \geq 0$$

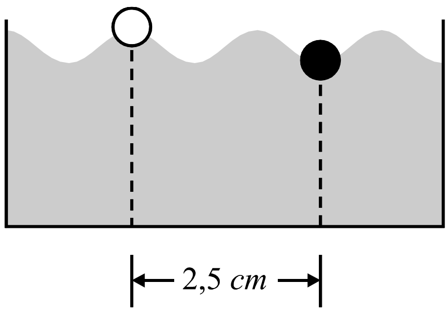
$$p(t) = 10 - 1{,}37\,e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t)\,, \qquad t \geq 0$$



3.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva o seguinte problema:

Durante os primeiros cinco segundos após o início da perturbação (instantes 0 e 5 incluídos), houve alguns instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente. Quantas vezes isso aconteceu?

3.2. Determine a distância que vai do **centro da bola branca** ao **centro da bola preta**, meio segundo após o início da perturbação, sabendo que, nesse instante, a distância entre as respectivas projecções horizontais (na base do recipiente) é de $2{,}5\ cm$. Apresente o resultado em cm, arredondado às décimas.



Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Considere, para cada $\alpha \in]0,1[$, a função, de **domínio** $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^\alpha$

Prove que, qualquer que seja o valor de $\alpha \in]0,1[$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

5. Lança-se um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

5.1. Considere os acontecimentos A e B:

A – «sai face par»;

B – «sai um número menor do que 4».

Indique o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$. **Justifique** a sua resposta.

5.2. Considere agora que o dado é lançado três vezes.

Qual é a probabilidade de a face 6 sair, pela primeira vez, precisamente no terceiro lançamento?

Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às décimas.

6. Considere o seguinte problema:

Um saco contém doze bolas, indistinguíveis ao tacto: três bolas com o número 1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Retiram-se, do saco, três bolas, ao acaso. Qual é a probabilidade de a soma dos números saídos ser igual a cinco?

Uma resposta correcta para este problema é $\dfrac{{}^3C_2 \times 4 + {}^5C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique esta resposta.

Nota:

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

· referência à Regra de Laplace;

· explicação do número de casos possíveis;

· explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 42
- **2.1.** 28
  - **2.1.1.** 14
  - **2.1.2.** 14
- **2.2.** 14

3. 28
- **3.1.** 14
- **3.2.** 14

4. 14

5. 20
- **5.1.** 10
- **5.2.** 10

6. 12

TOTAL **200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2004

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 42
- **2.1.** 28
  - **2.1.1.** 14
  - **2.1.2.** 14
- **2.2.** 14

3. 28
- **3.1.** 14
- **3.2.** 14

4. 14

5. 20
- **5.1.** 10
- **5.2.** 10

6. 12

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	C	B	D	A	C	D	B
Versão 2	D	B	A	A	D	B	D

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

   4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

   4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
   - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
   - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

   4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

   4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

   4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Substituição, na expressão $2\,i + \dfrac{w^2}{i}$, de w por $4-3i$ 1

Cálculo de $(4-3i)^2$ 4

Desenvolvimento do quadrado da diferença 2

Restantes cálculos 2

Divisão por i 5

Multiplicação de ambos os termos da fracção por um factor conveniente ($-\,i$ ou i), **ou** decomposição da fracção numa soma de fracções 1

Restantes cálculos 4

Adição do resultado obtido a $2\,i$ 1

2.º Processo

Substituição, na expressão $2\,i + \dfrac{w^2}{i}$, de w por $4-3i$ 1

Cálculo de $(4-3i)^2$ 4

Desenvolvimento do quadrado da diferença 2

Restantes cálculos 2

$2i = \dfrac{2\,i^2}{i}$ e adição das fracções 2

Divisão por i 4

Multiplicação de ambos os termos da fracção por um factor conveniente ($-\,i$ ou i), **ou** decomposição da fracção numa soma de fracções 1

Restantes cálculos 3

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$2\,i\,+\,\frac{w^2}{i}\Leftrightarrow 2\,i\,+\,\frac{(4-3i)^2}{i}\Leftrightarrow 2\,i\,+\,\frac{16-24\,i+9\,i^2}{i}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,i\,+\,\frac{16-24\,i-9\,i}{i}\Leftrightarrow\frac{-2+16-24\,i-9\,i}{i}\Leftrightarrow\frac{14-33\,i}{i}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $1+2\,(2+0)\,+\,2\,+0\,(0+0)+(\,-\,1)^{(*)}=4$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando utiliza simbologia inequivocamente incorrecta (escreve o símbolo de equivalência onde deveria estar o símbolo de igualdade) - ver critério geral 6.

Exemplo 2

$$2\,i\,+\,\frac{w^2}{i}=2\,i\,+\,\frac{4-3i}{i}=\,\frac{2\,i^2+4-3\,i}{i}=2\,i\,+\,\frac{4}{i}\,-3$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $0^{\,(*)}\,+0\,(0+0)+\,0^{\,(**)}+1\,(1+0)=1$

(*) Substituição incorrecta, na medida em que o examinando escreve $4-3i$ em vez de $(4-3i)^2$

(**) Apesar de o examinando ter efectuado a redução ao mesmo denominador e indicado a soma dos numeradores, esta passagem é completamente inútil (é como se não existisse), na medida em que, por falta da substituição de $2\,i^2$ por -2, bem como pela falta de redução dos termos semelhantes, tudo se passa como se o examinando tivesse passado directamente da segunda expressão para a última.

Exemplo 3

$$2\,i\,+\,\frac{w^2}{i}\;=\;2\,i\,+\,\frac{(4-3i)^2}{i}\;=\;2\,i\,+\,\frac{16-9\,i^2}{i}\;=\;2\,i\,+\,\frac{16+9}{i}\;=$$

$$=2\,i\,+\,\frac{25\,(-i)}{i\,(-i)}=2\,i\,+\,\frac{-25\,i}{-i^2}\;=\;2\,i\,+25\,i\;=\;27\,i$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $1+2(0+2)\,+\,3(1+2^{(*)})+1=7$

(*) Atribuiu-se 2 dos 4 pontos previstos para esta etapa, pois:

- devido ao erro cometido no desenvolvimento do quadrado da diferença, o grau de dificuldade diminuiu um pouco, pelo que se considerou que a cotação máxima a atribuir a esta etapa deveria ser de 3 pontos, em vez de 4 (ver critério geral 4.4);
- o examinando comete um erro de contas ocasional (erro de sinal), que deve ser penalizado em 1 ponto (ver critério geral 4.2).

Exemplo 4

$$2\,i\,=2\,cis\frac{\pi}{2}\qquad w=4-3\,i\qquad \rho=\sqrt{4^2+(\,-\,3)^2}=5\qquad tg\,\theta=\,-\,\frac{3}{4}$$

Cotação a atribuir: $0^{\,(*)}$

(*) Apesar de correctos, os cálculos apresentados pelo examinando não conduzem à solução do exercício, pelo que esta resposta não pode ser considerada uma resolução incompleta. Observe-se que o examinando só poderia seguir um método baseado na representação trigonométrica, utilizando um valor aproximado para o argumento. Para isso, teria de recorrer à calculadora, processo que contraria a instrução de não utilização da mesma, dada no enunciado (ver critério geral 7).

1.2. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

<u>1.º Processo:</u>

$w = 5\,cis\,\alpha$ .... 2 (1+1)

$\overline{w} = 5\,cis\,(-\,\alpha)$ .... 3 (1+2)

$i \times \overline{w} = 5\ cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ .... 5 (1+4)

Nota:
As subdivisões das cotações indicadas entre parêntesis correspondem: a primeira, à escrita do módulo; a segunda, à escrita do argumento.
Se o examinando determinar um valor aproximado de α, as cotações máximas a atribuir deverão ser, respectivamente, 1 (1+0), 2 (1+1) e 4 (1+3) pontos.

<u>2.º Processo:</u>

$\overline{w} = 4 + 3\,i$ 1

$i \times \overline{w} = -3 + 4\,i$ 2

$i \times \overline{w} = 5\ cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **(ver notas 1 e 2)** .... 7 (1+6)

Notas:

1. 1+6 significa: 1 ponto pela escrita do módulo, 6 pontos pela escrita do argumento. Estes 6 pontos podem ser subdivididos em 2+4: 2 pontos pela escrita de $-\,\alpha$ e 4 pontos pela escrita de $\frac{\pi}{2}$.

2. Se o examinando determinar um valor aproximado de um argumento de $i \times \overline{w}$, a cotação máxima a atribuir a esta etapa deverá ser de 2 (1+1) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$arg\,(w) = \alpha$

$w = \rho\ cis\,\alpha \qquad\qquad \overline{w} = \rho\ cis\,(-\ \alpha)$

$i \times \overline{w} = \rho\ cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Cotação a atribuir (1.º processo): $1(0+1) + 3(1+2) + 5(1+4) = 9$

Exemplo 2

$|\,w\,| = \sqrt{16+9} = 5$

$tg\left(-\ \frac{3}{4}\right) \approx -\,0{,}64$

$i\ \times\ 5\,cis\,(-\,0{,}64) = 5\,cis\,(-\,0{,}64)$

Cotação a atribuir (1.º processo): $1(1+0)\ +\ 1(1+0^{(*)}) + 1(1+0)^{(**)} = 3$

(*) O valor $-\,0{,}64$ é um valor aproximado às centésimas de um argumento de w, e não de $\overline{w}$

(**) Não deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois, apesar de o examinando escrever a expressão inequivocamente incorrecta $tg\left(-\ \frac{3}{4}\right) \approx -\,0{,}64$, as subdivisões da cotação que dizem respeito à escrita dos argumentos foram todas cotadas com 0 (zero) pontos - ver critério geral 6.

Exemplo 3

$w = 4 - 3\,i \qquad\qquad \overline{w} = 4 + 3\,i$

$i \times \overline{w} = -\,3\,+\,4\,i \qquad |\,i \times \overline{w}\,| = \sqrt{9+16} = 5$

$tg\ \theta = -\ \frac{4}{3} \qquad \theta \approx -\,0{,}927$

$i \times \overline{w} = 5\ cis\,(-\,0{,}927)$

Cotação a atribuir (2.º processo): $1\ +\ 2\ +\ 1\,(1+0^{(*)}) = 4$

(*) O valor $-\,0{,}927$ não é um valor aproximado às milésimas de um argumento de $i \times \overline{w}$, dado que a imagem geométrica de $i \times \overline{w}$ pertence ao segundo quadrante.

2.1.1. .... **14**

Calcular $f'(x)$ **(ver nota)** 5

Calcular $f'(1)$ 3

Calcular $f(1)$ 2

Escrever a equação reduzida da recta pedida 4

Determinar a ordenada na origem 3

Escrever a equação 1

ou

Escrever a equação $y - f(1) = f'(1)\,(x-1)$ 2

Escrever a equação reduzida..2

Nota:
Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão da derivada da função, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$f'(x) = \frac{(e^x-1)' \times x - x'(e^x-1)}{x^2} = \frac{e^x \times x - e^x - 1}{x^2}$$

$f'(1) = -1$ $\qquad\qquad$ $f(1) = e - 1$

$y = -x + b$ $\qquad\qquad$ $e - 1 = -1 + b \Leftrightarrow b = e$

$y = -x + e$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 3 + 2 + 4\,(3+1) = 12$

(*) Penalizou-se em 2 pontos o erro cometido no cálculo da derivada (não se considerou ser um erro de contas ocasional).

Exemplo 2

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - 1 \times (e^x - 1)}{x^2} = \frac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{e^x(x+1)}{x^2}$$

$$f'(1) = 2\,e = m$$

$f(1) = e - 1 \approx 2{,}7 - 1 = 1{,}7 \approx 2$ Ponto $(1, 2)$

$$y - 2 = 2\,e\,(x - 1)$$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 3 + 1 + 2\,(2 + 0) = 8$
(*) Penalizou-se em 3 pontos o erro cometido na simplificação da expressão da derivada (considerou-se um erro grave) - ver critério geral 4.2.

Exemplo 3

$$f'(x) = e^x \times x - 1 \times (e^x - 1) = x\,e^x - e^x - 1$$

$$f'(1) = -1$$

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 3 + 0 + 0\,(0 + 0) = 4$
(*) Atribuiu-se 1 ponto - ver a nota na página anterior que diz: *se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão da derivada da função, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto*.

Exemplo 4

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)' \times x - x'(e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x \times x - (e^x - 1)}{x^2}$$

$f'(1) = 1$ $m = 1 \Rightarrow y = x + b$

$1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0$ $y = x$

Cotação a atribuir: $5 + 3 + 0 + 1\,(0^{(*)} + 1^{(**)}) = 9$
(*) O cálculo de b está conceptualmente incorrecto, dado que o examinando substitui y por 1, que não é a ordenada do ponto de tangência.
(**) Ver critério geral 4.3

2.1.2. .... **14**

Estudar a função quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico.....4

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ **(ver nota 1)** 2

Concluir que a recta de equação $x = 0$ não é assimptota vertical do gráfico da função 1

Referir que, pelo facto de a função ser contínua em $\mathbb{R} \backslash \{0\}$, o seu gráfico não admite outras assimptotas verticais 1

Estudar a função quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico, quando $x \to +\infty$ 5

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **(ver nota 2)** 4

Concluir que o gráfico da função não admite assimptota horizontal, quando $x \to +\infty$ 1

ou

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ **(ver nota 3)** 4

Concluir que o gráfico da função não admite assimptota, quando $x \to +\infty$ 1

Estudar a função quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico, quando $x \to -\infty$ 5

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 4)** 4

Concluir que o gráfico da função admite uma assimptota horizontal, de equação $y = 0$, quando $x \to -\infty$ 1

ou

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ **(ver nota 4)** 2

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 4)** 2

Concluir que o gráfico da função admite uma assimptota horizontal, de equação $y = 0$, quando $x \to -\infty$ 1

Notas:

1. O examinando poderá calcular separadamente os dois limites laterais no ponto 0. Se o fizer, os 2 pontos relativos a esta etapa deverão ser subdivididos da seguinte forma:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ 1

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ 1

2. No cálculo deste limite, exige-se que o examinando explicite o processo utilizado para levantar a indeterminação. Por exemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x}{x} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty$$

Se não o fizer, a cotação máxima a atribuir a esta etapa é de 3 pontos.

3. No cálculo deste limite, exige-se que o examinando explicite o processo utilizado para levantar a indeterminação. Por exemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x}{x^2} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty$$

Se não o fizer, a cotação máxima a atribuir a esta etapa é de 3 pontos.

4. No cálculo deste limite, não se exige que o examinando apresente cálculos intermédios.

Se o examinando escrever que está perante uma indeterminação, deverá ser penalizado em, pelo menos, 50% da cotação atribuída à etapa.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$ Logo, o gráfico não tem assimptota vertical.

Assimptotas não verticais: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{e^x-1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^x-1}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x}{x^2} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x^2} = +\infty + \frac{-1}{+\infty} = +\infty$$

O gráfico não apresenta assimptotas não verticais.

Cotação a atribuir: $3(2+1+0) + 1(0+1^{(*)}) + 1\,(0+0+1^{(*)}) = 5$
(*) O examinando conclui correctamente a não existência de assimptotas não verticais, tendo em conta o resultado obtido.

Exemplo 2

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ Tem uma assimptota vertical: $x = 1$

Assimptotas não verticais: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{e^x-1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = +\infty + \frac{-1}{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x^2} = \frac{0-1}{+\infty} = 0$ Assimptota horizontal: $y = 0$

Cotação a atribuir: $2(2+0+0) + 4(4+0) + 2\,(2+0+0^{(*)}) = 8$
(*) Apesar de o examinando ter concluído a existência de assimptota horizontal $(y=0)$, quando $x \to -\infty$, não tinha todos os elementos que permitiam obter essa conclusão, dado que apenas calculou o valor de m.

Exemplo 3

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Logo, o gráfico não tem assimptota vertical; nenhum dos limites laterais é infinito.

Assimptotas horizontais:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x\to +\infty} 1 = +\infty - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0$$ Só tem assimptota horizontal $(y = 0)$ quando $x \to -\infty$

Cotação a atribuir: $3(2+1+0) + 3(2^{(*)} + 1^{(**)}) + 5\,(4+1) = 11$

(*) O examinando comete um erro grave, pelo que é penalizado em metade da cotação da etapa - ver critério geral 4.2.

(**) Embora não esteja explícito que o gráfico de f não tem assimptota horizontal, quando $x \to +\infty$, considera-se que essa conclusão está implícita na frase «*Só tem assimptota horizontal quando* $x \to -\infty$», pelo que tal conclusão deve receber a cotação indicada (1 ponto) - ver critério geral 4.5.

Exemplo 4

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \ \left(\frac{0}{0}\right) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Logo, o gráfico não tem assimptota vertical porque o limite é finito.

Assimptotas horizontais: $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \ \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$

Não existe assimptota horizontal quando $x \to +\infty$ porque o limite é infinito.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - 1}{x} \ \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0$$

Existe uma assimptota horizontal $(y = 0)$ quando $x \to -\infty$

Cotação a atribuir: $3(2+1+0) + 4(3^{(*)} + 1) + 3\,(2^{(**)} + 1) = 10$

(*) Ver nota 2

(**) Ver nota 4

2.2. .... **14**

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a inequação **(ver nota 1)**.. 4

$a \approx 0{,}15$ **(ver nota 2)** 5

$b \approx 2{,}27$ **(ver nota 3)** 5

Notas:

1. Os 4 pontos relativos à explicação do método utilizado devem ser atribuídos de acordo com o seguinte critério:

Apresentação do gráfico da função f e do gráfico da função definida por $3 + \ln x$, bem como dos pontos de intersecção dos dois gráficos e respectivas abcissas (ou apresentação do gráfico de $f(x) - 3 - \ln x$ e respectivos zeros) 4

Apresentação dos gráficos com ausência de alguns elementos (por exemplo, ausência das abcissas dos pontos de intersecção) e/ou com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico da função definida por $3 + \ln x$ não respeita o seu domínio). Não se exige que o examinando coloque uma bola aberta no ponto onde o gráfico de f intersecta o eixo Oy .... 1 a 3

Ausência de explicação, simples referências do tipo «*Vi na calculadora*» ou utilização de processo não gráfico, como, por exemplo, uma tabela.. 0

2. A escrita do valor aproximado pedido (para a) deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

<u>1.º Caso</u> (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $0{,}15$ 5

Resposta $0{,}14$ 4

Resposta $0{,}13$ ou $0{,}16$ 3

Resposta $0{,}12$ ou $0{,}17$ 2

Resposta $0{,}11$ ou $0{,}18$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento superior às centésimas):

Valor no intervalo $[0{,}141\ ;\ 0{,}151]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}131\ ;\ 0{,}161]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}121\ ;\ 0{,}171]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às décimas):

Valor igual a $0{,}1$ ou a $0{,}2$ 1

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às unidades):

Qualquer resultado 0

3. A escrita do valor aproximado pedido (para b) deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $2{,}27$ 5

Resposta $2{,}26$ 4

Resposta $2{,}25$ ou $2{,}28$ 3

Resposta $2{,}24$ ou $2{,}29$ 2

Resposta $2{,}23$ ou $2{,}30$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento superior às centésimas):

Valor no intervalo $[2{,}263\ ;\ 2{,}273]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}253\ ;\ 2{,}283]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}243\ ;\ 2{,}293]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às décimas):

Valor igual a $2{,}2$ ou a $2{,}3$ 1

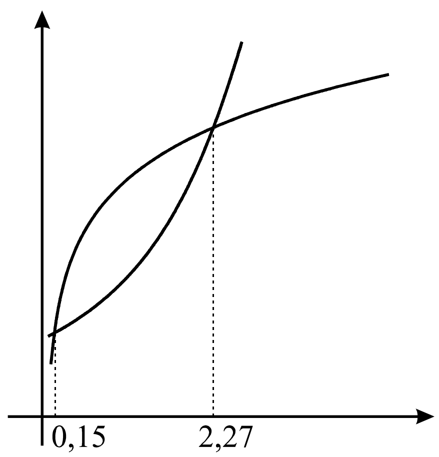
Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às unidades):

Qualquer resultado 0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



$a \approx 0{,}15$

$b \approx 2{,}27$

Cotação a atribuir: $4 + 5 + 5 = 14$

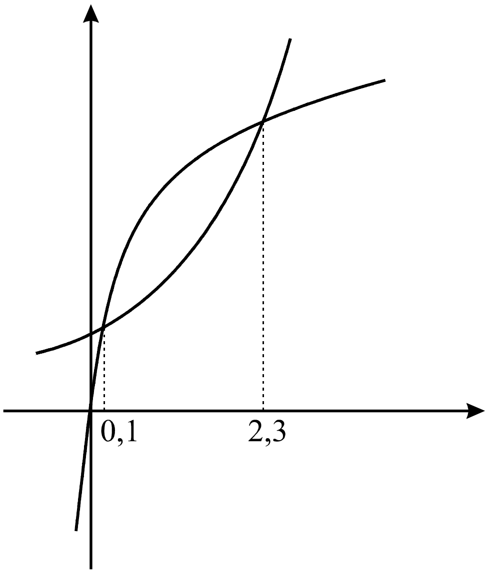
Exemplo 2

Fui à Table e vi que $f(x) \geq 3 + \ln x$ para $x \in [0{,}15\,,\ 2{,}27]$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$

(*) O examinando desrespeita a indicação, expressa no enunciado, de que se pretendia uma resolução gráfica da inequação (ver critério geral 7).

Exemplo 3



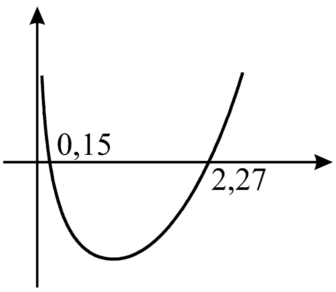
$a \approx 0{,}1 \qquad b \approx 2{,}3$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 1 + 1 = 4$

(*) O gráfico apresenta as abcissas dos pontos de intersecção, mas não respeita o domínio da função definida por $3 + \ln x$ (uma parte do gráfico desta função está no terceiro quadrante).

Exemplo 4

$$\frac{e^x - 1}{x} \leq 3 + \ln x \iff \frac{e^x - 1}{x} - 3 - \ln x \leq 0$$

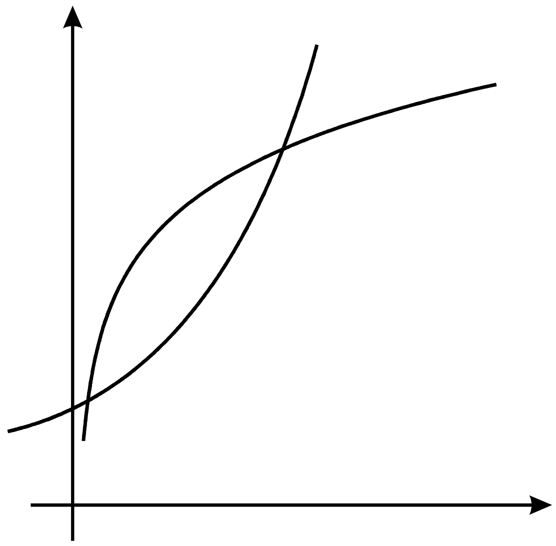


$x \in [0{,}15\, ,\; 2{,}27]$

Cotação a atribuir: $4 + 5 + 5 + (-1)^{(*)} = 13$

(*) O examinando comete um erro formal de escrita (o conjunto solução não é o intervalo indicado, já que $0{,}15$ e $2{,}27$ não são os extremos do intervalo, mas sim, valores aproximados desses extremos) - ver critério geral 6.

Exemplo 5



$a \approx 0{,}15$

$b \approx 2{,}27$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 5 + 5 = 13$
(*) O gráfico não apresenta as abcissas dos pontos de intersecção.

Exemplo 6

$a \approx 0{,}15$

$b \approx 2{,}27$

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$
(*) Ver critério geral 2.

3.1. .... **14**

Equacionar o problema: $b(t) = p(t)$ 3

$b(t) = p(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-0,1t}\, sen\,(\pi t) = -1{,}37\, e^{-0,1t}\, sen\,(\pi\, t)$........................1

$\Leftrightarrow 2{,}37\, e^{-0,1t}\, sen\,(\pi\, t) = 0$..1

$\Leftrightarrow sen\,(\pi\, t) = 0$... 2

$\Leftrightarrow \pi\, t = k\,\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$ **(ver nota 1)**...2

$\Leftrightarrow\ t = k\,,\ k \in \mathbb{N}_0$ 1

$t = k\,,\ k \in \mathbb{N}_0\ \wedge\ t \in [0,5]\ \Leftrightarrow\ t \in \{0,1,2,3,4,5\}$ 3

Conclusão (Durante os primeiros cinco segundos, as duas bolas estiveram seis vezes à mesma distância da base do recipiente.) 1

Notas:

1. Se o examinando indicar $k \in \mathbb{Z}$, não deve ser penalizado.

2. Se o examinando se limitar a verificar que $b(0) = p(0)$, ..., $b(5) = p(5)$, não prova que as únicas soluções do problema são $0, 1, 2, 3, 4$ e 5. Esta resposta deverá ser cotada em 7 pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$b(t) = p(t)$

$10 + e^{-0,1t}\, sen\,(\pi t) = 10 - 1{,}37\, e^{-0,1t}\, sen\,(\pi\, t)$

$e^{-0,1t}\, sen\,(\pi t) = -1{,}37\, e^{-0,1t}\, sen\,(\pi\, t)$

$-1{,}37\, e^{-0,1t}\, sen\,(\pi\, t) = 0$

Cotação a atribuir: $3 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 4$

Exemplo 2

Estiveram por 6 vezes a igual distância em $t = 0,\ t = 1,\ t = 2,\ t = 3,\ t = 4,\ t = 5,$

porque nestes momentos o seno é sempre igual a zero, logo estiveram a 10 cm da base do recipiente.

Cotação a atribuir: 7 (ver a nota 2, que diz: «*Se o examinando se limitar a verificar que* $b(0) = p(0),\ .....,\ b(5) = p(5)$, *não prova que as únicas soluções do problema são* $0, 1, 2, 3, 4$ *e* 5. *Esta resposta deverá ser cotada em 7 pontos.*»)

Exemplo 3

$$b(t) = p(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 + e^{-0{,}1\,t}\ sen\,(\pi\,t) = 10 - 1{,}37\ e^{-0{,}1\,t}\ sen\,(\pi\ t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}1\,t}\ sen\,(\pi\,t) = -\,1{,}37\ e^{-0{,}1\,t}\ sen\,(\pi\ t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\,t}\ sen\,(\pi\,t) = -\,1{,}37\ e^{\,t}\ sen\,(\pi\ t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\,(\pi\,t)\ \ (e^{\,t} + 1{,}37\ \ e^{\,t}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\,(\pi\,t) = 0 \ \vee\ \underbrace{e^{\,t} + 1{,}37\ \ e^{\,t} = 0}_{\text{equação impossível}} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \ \vee\ t = 1 \ \vee\ t = 2 \ \vee\ t = 3 \ \vee\ t = 4 \ \vee\ t = 5$$

Estiveram à mesma altura seis vezes.

Cotação a atribuir: $3 + 1 + 0 + 2 + 2^{(*)} + 1^{(*)} + 3 + 1 = 13$
(*) Ver critério geral 4.5

3.2. .... **14**

Cálculo de $b\left(\frac{1}{2}\right)$ 2

Cálculo de $p\left(\frac{1}{2}\right)$ 2

Cálculo do cateto desconhecido $\left(b\left(\frac{1}{2}\right)-p\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ **(ver nota 1)** 2

Aplicação do Teorema de Pitágoras e conclusão **(ver nota 1)** 8

Notas:

1. Deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos às duas últimas etapas, no caso em que o examinando não tenha cumprido as duas primeiras. Em particular, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos às duas últimas etapas, no caso em que o examinando utilize valores resultantes de uma tentativa de resolver as equações $b(t)=1/2$ e $p(t)=1/2$.
Obviamente, esta disposição não se aplica quando o examinando, ao tentar cumprir as duas primeiras etapas, comete erros de cálculo.

2. Se o examinando não apresentar o resultado final arredondado às décimas, ou se apresentar um arredondamento incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

3. Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de duas casas decimais, nos cálculos intermédios, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$b\left(\frac{1}{2}\right)=10+e^{-0{,}1\times 0{,}5}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx 10+0{,}9=10{,}9$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right)=10-1{,}37\,e^{-0{,}1\times 0{,}5}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx 10-1{,}37\times 0{,}9\approx 10-1{,}2=8{,}8$$

$10{,}9-8{,}8=2{,}1$ $\qquad$ $2{,}1^2+2{,}5^2=d^2$ $\qquad$ $4{,}4+6{,}25=d^2$

$10{,}65=d^2$ $\qquad$ $d\approx 3{,}3$

Cotação a atribuir: $2+2+2+8+(-1)^{(*)}=13$

(*) O examinando não respeita a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de duas casas decimais, nos cálculos intermédios, pelo que deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta (ver nota 3).

Exemplo 2

$$10 + e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\, t) = 0,5 \;\Leftrightarrow\; 20 = \,-\,e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\, t) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; ln\,20 \;=\; -\,0,1\,t\;\text{sen}\,(\pi\, t) \;\Leftrightarrow\; t = \frac{ln\,20}{0,1} \Leftrightarrow t = 29,96$$

$$10 - 1,37\,e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\, t) = 0,5 \;\Leftrightarrow\; \frac{20}{1,37} \;= e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\, t) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; ln\,14,6 \;=\; 0,1\,t\;\text{sen}\,(\pi\, t) \;\Leftrightarrow\; t = \frac{ln\,14,6}{0,1} \;\Leftrightarrow\; t = 26,8$$

$$29,96 - 26,8 = 3,16 \qquad 3,16^2 + 2,5^2 = d^2 \;\Leftrightarrow\; 16,24 = d^2 \;\Leftrightarrow\; d = 4$$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$
(*) Ver nota 1

Exemplo 3

$$b(0,5) = 10 + e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) \approx 10,45$$

$$p(0,5) = 10 - 1,37\,e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) \approx 8,76$$

$$p(0) = b(0) = 10 \qquad 10,45 - 10 = 0,45 \qquad 10 - 8,76 = 1,24$$

$$1,24 + 0,45 = 1,69 \qquad 1,69^2 + 2,5^2 = d^2 \qquad d \approx 3,0$$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 2^{(*)} + 8^{(*)} = 12$
(*) O examinando utiliza um processo de cálculo do cateto desconhecido que, embora não seja o mais esperado ($b(0,5) - p(0,5)$), está correcto. É, portanto, devido aos erros de cálculo cometidos nas etapas anteriores que o valor obtido ($1,69$) está incorrecto. O Teorema de Pitágoras está também correctamente aplicado e o arredondamento final está igualmente correcto. Portanto, de acordo com o critério geral 4.3, deve ser atribuída a totalidade da cotação às duas últimas etapas.

Exemplo 4

$$b(0,5) = 10 + e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) = 10 + e^{-0,1\,\times 0,5}\;\times 0 = 10$$

$$p(0,5) = 10 - 1,37\,e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) = 10 - 1,37\,e^{-0,1\,\times 0,5}\;\times 0 = 10$$

Uma vez que as duas bolas estão a 10 cm de distância da base do recipiente, a distância entre os centros delas é de 2,5 cm.

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 0 + 3^{(*)} = 5$
(*) Como a conclusão está correcta, em face dos valores obtidos para $b(0,5)$ e $p(0,5)$, entendeu-se que deveria ser atribuída alguma pontuação à última etapa. Por outro lado, devido ao erro cometido no cálculo de $b(0,5)$ e $p(0,5)$, o grau de dificuldade da última etapa diminuiu bastante, dado que, neste caso, não tem sentido aplicar o Teorema de Pitágoras. Entendeu-se, assim, que não deveriam ser atribuídos mais de 3 pontos a esta etapa (ver critério geral 4.4).

Exemplo 5

$$b(0{,}5) = 10 + e^{-0{,}1\,\times 0{,}5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0{,}5) \approx 10{,}95$$

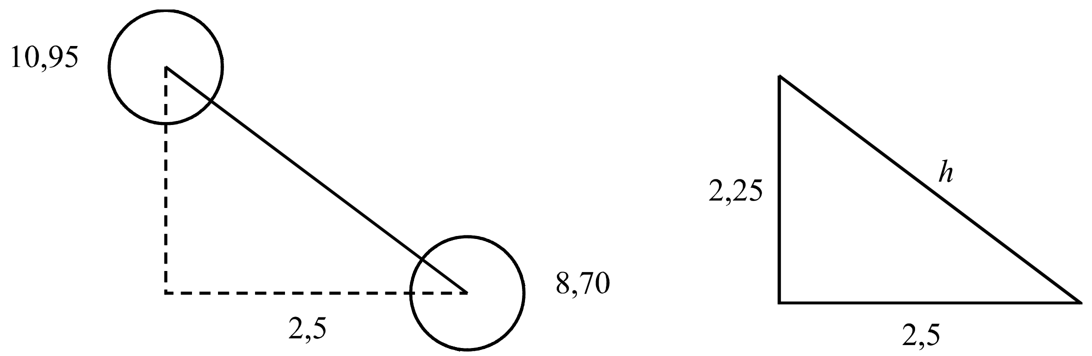
$$p(0{,}5) = 10 - 1{,}37\,e^{-0{,}1\,\times 0{,}5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0{,}5) \approx 8{,}70$$

$$b(0{,}5) - p(0{,}5) \approx 2{,}25$$

A distância entre os centros das bolas é de 2,3 cm

Cotação a atribuir: $2+2+2+0=6$

Exemplo 6



$$h^2 = 2{,}25^2 + 2{,}5^2$$

$$h^2 = 11{,}3125$$

$$h \approx 3{,}4$$

A distância entre os centros das bolas é de 3,4 cm

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 2^{(*)} + 2\ + 8 = 14$
(*) Ver critério geral 4.5.

4. .... **14**

Cálculo da primeira derivada de f 2

Cálculo da segunda derivada de f 4

Estudo do sinal da segunda derivada de f 7

Referência ao facto de $x^{\alpha-2}$ ser positivo, para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}^+$ 1

Justificação de que $\alpha(\alpha-1)$ é negativo 5

Referência ao facto de α ser positivo 1
Referência ao facto de $\alpha-1$ ser negativo 4

ou

Estudo do sinal da função quadrática definida por $\alpha^2-\alpha$ e conclusão de que é negativa para $\alpha \in \left]0,1\right[$ 5

Conclusão de que $f''(x)$ é negativa, para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}^+$ 1

Conclusão de que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo 1

Nota:
Qualquer tentativa de resolução desta questão apoiada apenas em valores particulares de α deverá ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$f(x)=x^{\alpha}$ $\quad f'(x)=\alpha\, x^{\alpha-1}$ $\quad f''(x)=\underbrace{\alpha}_{+}\ \underbrace{(\alpha-1)}_{-}\ \underbrace{x^{\alpha-2}}_{+}<0$

Logo, a concavidade está voltada para baixo.

Cotação a atribuir: $2+4+7\,(1+5\,(1+4\,)+1)+1=14$

Exemplo 2

$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$

$f''(x) = \alpha^2 - \alpha\, x^{\alpha-2}$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$
$f(x)$	$\frown$

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 0\ + 0^{(*)} = 4$

(*) O quadro está descontextualizado (o examinando, sabendo que se pretendia provar que a concavidade está voltada para baixo, faz um quadro no qual pretende evidenciar essa conclusão, mas que não resulta da expressão obtida para a segunda derivada) - ver critério geral 8.

Exemplo 3

$\alpha = 0{,}5$

$f(x) = x^{0{,}5}$

$f'(x) = 0{,}5\, x^{-0{,}5}$

$f''(x) =\ - 0{,}25\, x^{-1{,}5}$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$
$f(x)$	$\frown$

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver a nota que refere «*Qualquer tentativa de resolução desta questão apoiada apenas em valores particulares de* α *deverá ser cotada com 0 (zero) pontos*».

Exemplo 4

$\alpha = \dfrac{1}{n}$

$f(x) = x^{1/n}$

$f(x) = \sqrt[n]{x}$

Portanto, a concavidade está voltada para baixo.

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Ver a nota que refere «*Qualquer tentativa de resolução desta questão apoiada apenas em valores particulares de* α *deverá ser cotada com 0 (zero) pontos*».

5.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo (sem utilização da fórmula da probabilidade condicionada):

Neste caso, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$,
acompanhado de justificação completa **(ver nota)** 10

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$,
acompanhado de justificação não totalmente completa e/ou com
algumas incorrecções .... 6 a 8

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$,
acompanhado de justificação muito incompleta 5

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$, sem
qualquer justificação (ver critério geral 2) 0

Nota:
Apresentam-se a seguir dois exemplos de justificações completas.

Exemplo 1: *Dado que o acontecimento A se realizou, sabemos que saiu face par, pelo que existem três casos possíveis (sair face 2, 4 ou 6), dos quais apenas um (sair face 2) é favorável à realização do acontecimento B.*

Exemplo 2: $A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $A \cap B = \{2\}$

$P(B|A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A)} = \frac{1}{3}$

2.º Processo (com utilização da fórmula da probabilidade condicionada):

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 1

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ 7

$P(A) = \frac{1}{2}$ 1

$P(B|A) = \frac{1}{3}$ **(ver nota 1)**.. 1

Notas:

1. No caso de o resultado obtido não pertencer ao intervalo $[0, 1]$, não deve ser atribuído o ponto relativo a esta etapa.

2. Se o examinando utilizar uma fórmula incorrecta (por exemplo $P(B|A) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)}$, $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$ ou $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$), deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à sua resposta.

3. Se o examinando escrever $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$, não explicitando que $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ e que $P(A) = \frac{1}{2}$, deve ser atribuída a cotação de 8 pontos à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$A = \{2,4,6\}$ $\quad B = \{1,2,3\}$ $\quad P(B|A) = \frac{1}{3}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $5^{(*)}$

(*) Indicação do valor da probabilidade pedida, acompanhado de justificação muito incompleta.

Exemplo 2

$A \cap B$: sair face par e sair número menor que 4 $\quad A$: sair face par $\quad P(B|A) = \frac{A \cap B}{A} = \frac{1}{3}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $6^{(*)}$

(*) Indicação do valor da probabilidade pedida, acompanhado de justificação com uma incorrecção grave.

Exemplo 3

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $1 + 0 + 1 + 1 = 3$

Exemplo 4

$$P(B|A) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $0^{(*)}$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 5

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

Cotação a atribuir: (2.º processo) $8^{(*)}$

(*) Ver nota 3.

5.2. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Probabilidade pedida $= \frac{5^2}{6^3}$ **(ver notas 1, 2, 3 e 4)**..9

Probabilidade pedida $\approx 11{,}6\%$ **(ver nota 5)**.. 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{5^2}{6^3}$ (fracção correcta).. 9

Outras fracções com denominador 6^3 3

Outras situações 0

3. Se o examinando indicar correctamente o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverão ser atribuídos 8 pontos à sua resposta.

4. Se o examinando indicar correctamente apenas o número de casos possíveis $\left(6^3\right)$ ou apenas o número de casos favoráveis $\left(5^2\right)$, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

5. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos. No caso de o resultado obtido ser negativo ou superior a 100%, também não deve ser atribuído o ponto relativo a esta etapa.

2.º Processo:

Probabilidade pedida $= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ **(ver nota 1)**.................................... 9

Probabilidade pedida $\approx 11{,}6\%$ **(ver nota 2)**.. 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá a probabilidade pedida, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ (expressão correcta).. 9

$\left(\frac{5}{6}\right)^3$ ou $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ ou $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$ ou

${}^3C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$.. 3

Outras situações 0

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos. No caso de o resultado obtido ser negativo ou superior a 100%, também não deve ser atribuído o ponto relativo a esta etapa.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$p = \frac{1}{{}^6A'_3} = \frac{1}{216} \approx 0{,}005 = 0{,}5\%$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $3 + 1 = 4$

Exemplo 2

$$p = {}^3C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} \approx 34{,}7\%$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $3 + 1 = 4$

6. .... **12**

A composição deve contemplar os seguintes pontos:

1. Referência à Regra de Laplace.
   1.1. Referir a equiprobabilidade dos casos possíveis.
   1.2. Referir que a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

2. Explicação do valor ${}^{12}C_3$ (número de casos possíveis) - o examinando deverá referir que ${}^{12}C_3$ é o número de maneiras de retirar três bolas, de entre doze.

3. Explicação da contagem do número de casos favoráveis:
   3.1. Referir que existem duas hipóteses em alternativa: ou se retiram duas bolas com o número 1 e uma bola com o número 3, ou se retiram duas bolas com o número 2 e uma bola com o número 1.
   3.2. Explicação do valor ${}^{3}C_2$ - o examinando deverá referir que ${}^{3}C_2$ é o número de maneiras de retirar duas bolas, de entre as três que têm o número 1.
   3.3. Explicação do valor 4 - o examinando deverá referir que 4 é o número de maneiras de retirar uma bola, de entre as quatro que têm o número 3.
   3.4. Explicação do valor ${}^{5}C_2$ - o examinando deverá referir que ${}^{5}C_2$ é o número de maneiras de retirar duas bolas, de entre as cinco que têm o número 2.
   3.5. Explicação do valor 3 - o examinando deverá referir que 3 é o número de maneiras de retirar uma bola, de entre as três que têm o número 1.

Na tabela seguinte indica-se como esta questão deve ser cotada:

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 $(*)$	Nível 2 $(**)$	Nível 3 $(***)$
A composição contempla os oito pontos.	12	11	10
A composição contempla sete pontos.	10	9	8
A composição contempla seis pontos.	8	7	6
A composição contempla cinco pontos.	6	5	5
A composição contempla quatro pontos.	5	4	4
A composição contempla três pontos.	4	3	3
A composição contempla dois pontos.	3	2	2
A composição contempla um ponto.	2	1	1

$(*)$ **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

$(**)$ **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

$(***)$ **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

O número de casos possíveis é o número de maneiras de escolher três bolas de um total de doze, pelo que o número de casos possíveis é ${}^{12}C_3$.

Para que a soma dos números saídos seja 5*, ou se retiram duas bolas com o número* 1 *e uma bola com o número* 3*, ou se retiram duas bolas com o número* 2 *e uma bola com o número* 1.

No primeiro caso, temos de escolher duas bolas com o número 1*, de entre três, e uma bola com o número* 3*, de entre quatro, pelo que existem* ${}^3C_2 \times 4$ *maneiras diferentes de o fazer.*

No segundo caso, temos de escolher duas bolas com o número 2*, de entre cinco, e uma bola com o número* 1*, de entre três, pelo que existem* ${}^5C_2 \times 3$ *maneiras diferentes de o fazer.*

O número de casos favoráveis é, então, ${}^3C_2 \times 4 + {}^5C_2 \times 3$.

Uma vez que todos os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade pedida é, de acordo com a Regra de Laplace, $\frac{{}^3C_2 \times 4 + {}^5C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$.

Cotação a atribuir: $12^{(*)}$

(*) A composição contempla os oito pontos, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Exemplo 2

Casos possíveis serão todas as hipóteses que existem tendo em conta as condições dadas, ou seja, existindo 12 bolas, elas terão de ser tiradas 3 a 3. É uma combinação pois não interessa a ordem.

Casos favoráveis - podemos tirar duas bolas de 1 e dps uma bola de 3 (existe por isso a multiplicação por 4), dps podemos tirar duas bolas de 2 e juntar uma de 1 que dará 5, existem três bolas de 1, daí a multiplicação por 3.

Regra de Laplace é apenas que a probabilidade de um acontecimento é o número de casos favoráveis sobre (dividir) o nº de casos possíveis.

Por isso, $\frac{{}^3C_2 \times 4 + {}^5C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$ *é a resposta ao problema.*

Cotação a atribuir: $4^{(*)}$

(*) A composição contempla quatro pontos (os pontos 1.2, 2, 3.1 e 3.5), numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.

Exemplo 3

Casos possíveis são todos os acontecimentos que se podem verificar. Logo são conjuntos de 3 bolas feitos a partir das 12 bolas tendo em conta que a ordem de saída não conta é por isso ${}^{12}C_3$.

Os casos favoráveis são conjuntos de duas bolas 2 + uma bola 1 ou conjuntos de duas bolas 1 + uma bola 3. É assim = às combinações de ${}^3C_2 \times 4 + {}^5C_2 \times 3$.

Usa-se a Regra de Laplace $= \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$.

Cotação a atribuir: $3^{(*)}$

(*) A composição contempla três pontos (os pontos 1.2, 2 e 3.1), numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.