Comentário ao Exame de Matemática 12º Ano (435) - 2ª fase

A prova está de acordo com o programa, respeita as informações quanto à estrutura e ao peso dos temas e é resolúvel no tempo que lhe é destinado. Embora apresente uma ou outra questão mais selectiva, pode ser considerada acessível e adequada enquanto prova de exame de final do ensino secundário.

Associação de Professores de Matemática

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA (PROVA435) 2ªFASE

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	B	D	A	C	D	B
Versão 2	D	B	A	A	D	B	D

Grupo II

1.1.

$$2i+\frac{w^2}{i}=2i+\frac{(4-3i)^2}{i}=2i+\frac{7-24i}{i}=2i+\frac{7-24i}{i}\times\frac{-i}{-i}=2i+\frac{-24-7i}{1}=-24-5i$$

1.2.

$$|w|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

$$w=5\,cis\,a \qquad\qquad i=cis\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$i\times\overline{w}=cis\left(\frac{p}{2}\right)\times 5\,cis(-a)=5\,cis\left(\frac{p}{2}-a\right)$$

2.1.1.

$$f'(x)=\frac{e^x\times x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

$$m=f'(1)=\frac{e-e+1}{1}=1 \qquad\qquad f(1)=e-1$$

A equação da recta tangente é do tipo $y=x+b$.

Para $x=1$ e $y=e-1$ tem-se: $e-1=1+b \Leftrightarrow b=e-2$

Logo a equação pedida é $y=x+e-2$

2.1.2.

Assimptotas verticais:

$$\lim_{x\to o} f(x) = \lim_{x\to o} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Como $\lim_{x\to o} f(x)$ é finito e f é contínua em $IR \setminus \{0\}$ então o gráfico da função não tem assimptotas verticais.

Assimptotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = +\infty - 0 = +\infty$$

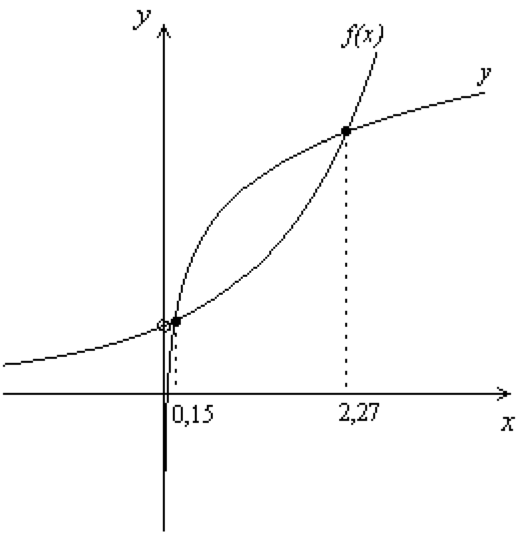
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0-1}{-\infty} = 0$$

A recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico da função quando x tende para $-\infty$

2.2.

Determinar graficamente o conjunto solução da inequação $f(x) \le 3 + \ln(x)$ corresponde a determinar a parte do gráfico da função f que fica "abaixo" do gráfico da função $y = 3 + \ln(x)$.

Representando, por exemplo, na janela de visualização $[-2,4]\times[-2,5]$, parte dos gráficos das funções referidas acima e determinando as abcissas dos pontos de intersecção, verifica-se que $a \approx 0{,}15$ e $b \approx 2{,}27$.



3.1.

$$b(t) = p(t)$$
$$\Leftrightarrow 10 + e^{-0,1t}\operatorname{sen}(p\ t) = 10 - 1{,}37e^{-0,1t}\operatorname{sen}(p\ t)$$
$$\Leftrightarrow 2{,}37e^{-0,1t}\operatorname{sen}(p\ t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(p\ t) = 0$$
$$\Leftrightarrow p\ t = kp\ ,\ k \in Z_0^+$$
$$\Leftrightarrow t = k\ ,\ k \in Z_0^+$$

Atribuindo valores a k obtêm-se os seguintes valores para t.

Se $k = 0$ então $t = 0$
Se $k = 1$ então $t = 1$
Se $k = 2$ então $t = 2$
Se $k = 3$ então $t = 3$
Se $k = 4$ então $t = 4$
Se $k = 5$ então $t = 5$

Como $t \in [\,0\,,5\,]$ as bolas estiveram 6 vezes a igual distância da base do recipiente.

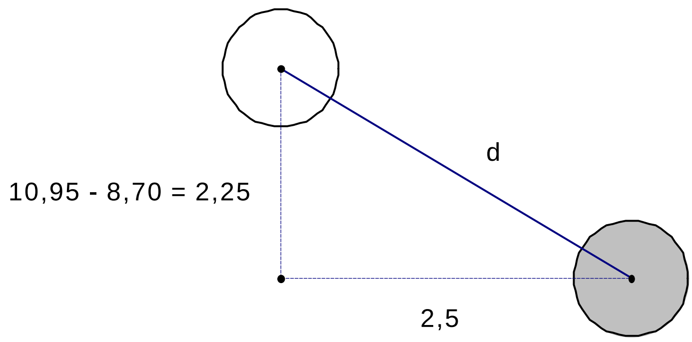
3.2.

$$b(0{,}5) = 10 + e^{-0,1\times 0,5} \times \operatorname{sen}(p \times 0{,}5) \approx 10{,}95$$

$$p(0{,}5) = 10 - 1{,}37e^{-0,1\times 0,5} \times \operatorname{sen}(p \times 0{,}5) \approx 8{,}70$$

b(0,5) – p(0,5) = 2,25

$$d^2 = 2{,}25^2 + 2{,}5^2$$
$$\Leftrightarrow d^2 = 11{,}3125$$
$$\Leftrightarrow d = 3{,}3634$$
$$\Leftrightarrow d \approx 3{,}4\,cm$$



Assim, a distância entre os centros das bolas é de aproximadamente 3,4 cm.

4.

$f(x) = x^a$

$f'(x) = a\ x^{a-1}$

$f''(x) = a\ (a-1)x^{a-2}$

Como $D_f = IR^+$ então $x^{a-2} > 0$

Como $a \in \left]0,1\right[$ então $a > 0$ e $a - 1 < 0$

Logo $f''(x) = a\,(a-1)x^{a-2} < 0 \quad \forall\ x \in R^+$

Sendo a segunda derivada negativa o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

5. 1.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

5.2.

Dado tararem-se de acontecimentos independentes, para que a face 6 saia pela primeira vez precisamente no terceiro lançamento, terá de não sair face 6 nos primeiros dois lançamentos e sair face 6 no terceiro.

Assim, a probabilidade pedida é dada por: $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 11{,}6\%$

6.

O número de casos possíveis é ${}^{12}C_3$ pois é o número de formas de escolher 3 bolas de um total de 12.
Existem duas possibilidades para que a soma dos números saídos seja 5:

1. saírem duas bolas com o número 1 e uma bola com o número 3;
2. saírem duas bolas com o número 2 e uma com o número 1.

No primeiro caso, existem ${}^{3}C_2 \times 4$ maneiras de fazer a escolha, pois têm de se escolher duas bolas com o número 1 de entre as três e uma bola com o número 3 de entre as quatro.
No segundo caso, existem ${}^{5}C_2 \times 3$ formas de fazer a escolha, devido a ter de se escolher duas bolas com o número dois de entre as cinco e uma bola com o número 1 de entre as três.
Assim sendo, o número de casos favoráveis é ${}^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3$.
Dado que os acontecimentos são equiprováveis, pela regra de Laplace, a probabilidade pedida é pois $\frac{{}^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$.

FIM