

**PARECER DA ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA 12<sup>o</sup> ano – 435 e 635  
2<sup>a</sup> FASE – 2006**

A generalidade dos alunos que realizaram esta prova de exame são os que iniciaram o ensino secundário no ano lectivo de 2003/2004 e que fizeram, por isso, um percurso muito irregular e diferenciado de escola para escola ao longo do ciclo de estudos secundários, cumprindo programas elaborados para maiores cargas horárias e prevendo desdobramento de turmas, o que não aconteceu. A APM sempre mostrou a sua preocupação junto das estruturas do Ministério da Educação relativamente a esta situação.

A realização de uma prova como a apresentada, para além de exigir conhecimentos sólidos, o que é normal, exige aos alunos que os saibam mobilizar depois de interpretar e compreender com clareza as situações que lhe são propostas. Relativamente à prova da 1<sup>a</sup> fase algumas das questões são formuladas de forma mais directa. Contudo, o número de questões que exigem uma leitura atenta e cuidada de forma a permitir a mobilização dos conhecimentos e a escolha de uma adequada estratégia de resolução é pouco compatível com o tempo que o aluno deverá ter para rever cuidadosamente o trabalho produzido e corrigir um erro, melhorar uma argumentação, refazer, se for caso disso, uma resposta. É pois na extensão da prova, atendendo à natureza das questões, que continua a residir o seu maior grau de dificuldade.

A importância que o programa atribui ao uso da tecnologia, em particular da calculadora gráfica, continua a não se reflectir nesta prova, em que, à excepção de uma das questões, o seu uso ou não é permitido ou é dispensável.

21/07/2006

A Direcção da APM

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA (PROVAS 435 e 635)  
2ªFASE**

**Grupo I**

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	D	A	C	A	D	A
Versão 2	B	C	A	B	D	D	C

**Grupo II**

1.1.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-i) \cdot \left(2 + cis\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{5} cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{(2-i) \cdot (2+i)}{\frac{1}{5} cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{4-i^2}{\frac{1}{5} cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{4+1}{\frac{1}{5} cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{5}{\frac{1}{5} cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$= \frac{5cis0}{\frac{1}{5} cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{5}{\frac{1}{5}} cis\left(0 + \frac{\pi}{7}\right) = 25cis\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

1.2.

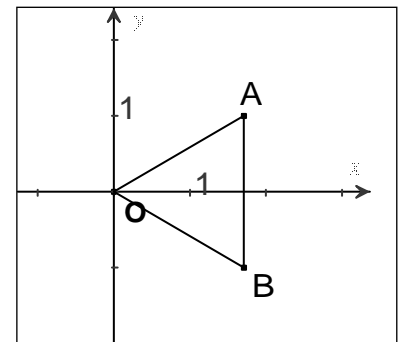
Tendo em conta que o triângulo [AOB] é equilátero então:

- a amplitude de cada ângulo interno mede  $\frac{\pi}{3} rad$
- cada lado mede 2 visto que tem perímetro 6 e daí  $\overline{OA} = 2$ .

Atendendo a que o afixo de  $\bar{z}$  é simétrico do afixo de  $z$  em relação

ao eixo  $Ox$ , então  $\arg(z) = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6} rad$

$$z = 2cis\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$



**Outro processo:**

Tendo em conta que o triângulo [AOB] é equilátero então cada lado mede 2 visto que tem perímetro 6 e daí  $\overline{OA} = 2$  e  $\overline{AB} = 2$ . A ordenada do ponto A será portanto igual a 1. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras para determinar a abcissa  $x$  do ponto A tem-se que:

$$x^2 + 1^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ (porque A está no 1º quadrante)}$$

As coordenadas do ponto A são então  $(\sqrt{3}, 1)$  logo  $z = \sqrt{3} + i$

## 2.1.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + x \ln(x-1)).$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty$ , então  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x + x \ln(x-1)) = -\infty$

Como a função  $f$  é contínua em  $]1; +\infty[$  então a recta de equação  $x = 1$  é a única assíntota vertical do seu gráfico.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x \cdot \ln(x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x}{x} + \frac{x \ln(x-1)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \ln(x-1)]$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty$  concluímos que o limite pretendido é  $+\infty$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  não é um número real, então o gráfico de  $f$  não admite assíntotas não verticais.

## 2.2.

$$f(2) = 2 + 2 \cdot \ln(2-1) = 2 + 0 = 2$$

Então as coordenadas do ponto Q são (2, 2).

$$f'(x) = 1 + \ln(x-1) + x \cdot \frac{1}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + \frac{x}{x-1}$$

$$m = f'(2) = 1 + \ln(2-1) + \frac{2}{2-1} = 1 + 0 + 2 = 3$$

Como a recta tangente ao gráfico de  $f$  tem declive 3 então a sua equação reduzida é do tipo  $y = 3x + b$ .

Uma vez que o ponto Q pertence à recta  $r$  e tem coordenadas (2, 2) então

$$2 = 3 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -4$$

Uma equação da recta  $r$  é  $y = 3x - 4$ .

Como P é o ponto de intersecção de  $r$  com o eixo  $Ox$ , a sua abcissa  $x$  verifica

$$0 = 3x - 4 \quad \text{ou seja} \quad x = \frac{4}{3}.$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{OR} = \frac{2 + \frac{4}{3}}{2} \times 2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

### 3.1.

Sendo o periélio o ponto da órbita da Terra mais próxima do Sol e passando o lado origem do ângulo  $x$  pelo periélio, então  $d$  será mínima para  $x = 0$ .

$$d(0) = 149,6 \cdot (1 - 0,0167 \cos 0) = 149,6 \cdot (1 - 0,0167) \approx 147,1$$

Atendendo à expressão analítica da função,  $d$  será máxima quando  $\cos x$  for mínimo. No intervalo  $[0, 2\pi[$ ,  $\cos x$  é mínimo para  $x = \pi$ . (Também do facto da órbita ser elíptica se pode concluir que a distância máxima se obtém quando  $x = \pi$ ).

$$d(\pi) = 149,6 \cdot (1 - 0,0167 \cos \pi) = 149,6 \cdot (1 + 0,0167) \approx 152,1$$

R.: As distâncias máxima e mínima da Terra ao Sol são de, aproximadamente, 152,1 e 147,1 milhões de quilómetros, respectivamente.

### 3.2.1.

$$x = \pi \Rightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi - 0,0167 \sin \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi \cdot T}{2\pi} \Leftrightarrow t = \frac{T}{2} \text{ como queríamos mostrar.}$$

O tempo que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até ao ponto correspondente ao ângulo  $\pi$  (ponto da órbita da Terra mais afastado do Sol) é metade do tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa.

### 3.2.2.

Entre 4 de Janeiro e 14 de Fevereiro decorreram 41 dias.

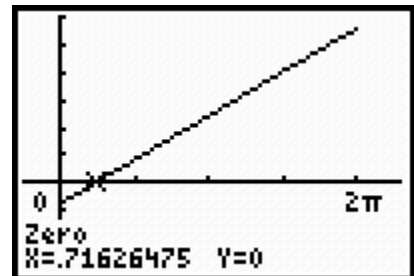
Como  $t = 41$  e  $T = 365,24$  tem-se que :

$$\frac{2\pi \times 41}{365,24} = x - 0,0167 \sin x$$

Precisamos assim de resolver a equação

$$0,7053 = x - 0,0167 \sin x, \text{ ou seja, } x - 0,0167 \sin x - 0,7053 = 0$$

Recorrendo à calculadora gráfica para resolver a equação anterior obteve-se 0,7163 para valor aproximado de  $x$ .



$$d(0,7163) = 149,6 \cdot (1 - 0,0167 \cos 0,7163) \approx 147,7$$

R.: No dia 14 de Fevereiro, a distância da Terra ao Sol é de, aproximadamente, 147,7 milhões de quilómetros.

4.

Para verificar a existência de pelo menos um número real  $c$  no intervalo  $]0,1[$ , tal que  $f(c) = f(c+1)$ , isto é, tal que  $f(c) - f(c+1) = 0$ , vamos utilizar a sugestão dada e tentar provar que a função definida por  $g(x) = f(x) - f(x+1)$ , admite pelo menos um zero no intervalo  $]0,1[$ .

Ora tem-se que:

1) A função  $g$  é contínua no intervalo  $[0,1]$  porque é definida pela diferença de funções contínuas ( $f$  é contínua em  $[0,2]$  e portanto também em  $[0,1]$ )

2)

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = f(0) - f(0+1) = f(0) - f(1) = -f(1) < 0 \\ g(1) = f(1) - f(2) = f(1) - 0 = f(1) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) \times g(1) < 0$$

Logo, pelo Teorema de Bolzano, a função  $g$  tem pelo menos um zero no intervalo  $]0,1[$  e portanto existe pelo menos um número real  $c$  no intervalo  $]0,1[$  tal que  $f(c) = f(c+1)$ .

5.1.

Para que a soma das idades dos dois alunos seja igual a 12, podemos escolher dois alunos com 6 anos ou um com 5 e outro com 7 anos. A probabilidade de tal ocorrer é:

$$P = \frac{{}^{10}C_2 + 4 \times 9}{{}^{23}C_2} = \frac{81}{253}$$

5.2.

$P(B|A)$  é a probabilidade de o aluno ser rapaz, sabendo que tem 7 anos. Existem 9 alunos com 7 anos, dos quais 2 são rapazes. Assim sendo, tem-se que:

$$P(B|A) = \frac{2}{9}$$

6.

A opção 1 rejeita-se porque  $P(X \cup Y) < 1$  é falsa, uma vez que  $X \cup Y$  é o acontecimento certo, e portanto  $P(X \cup Y) = 1$ .

A opção 2 rejeita-se porque todo o número múltiplo de 4 é par, mas nem todos os pares são múltiplos de 4 ( $Y \subset X$ ). Assim,  $P(X \cup Y) = P(X)$  e portanto  $P(X \cup Y) > P(X)$  é falsa.

A opção 3 rejeita-se porque os acontecimentos  $X$  e  $Y$  são incompatíveis (não existem raparigas com 18 anos na turma), sendo portanto  $P(X \cap Y) = 0$ . Logo  $P(X \cap Y) > 0$  é falsa.

Rejeitadas as opções 1, 2 e 3, a opção 4 é a única em que as três afirmações são verdadeiras.

**FIM**

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em <http://www.apm.pt>